Rango di $M \in \mathbb{K}^{m,n}$

$rk(M) = \rho(M) =$ dimensione dello sp. vettoriale generato dalle colonne di M

$=$ dimensione dell'immagine della funzione lineare

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$
$$X \to MX$$

$=$ dimensione dello sp. vettoriale generato dalle righe di M

Kronecker $\to$ $=$ ordine massimo di un minore non ~~nullo~~ singolare contenuto in M

Teorema degli orlati $\to$ $=$ ordine di un minore non singolare contenuto in M tale che ogni suo

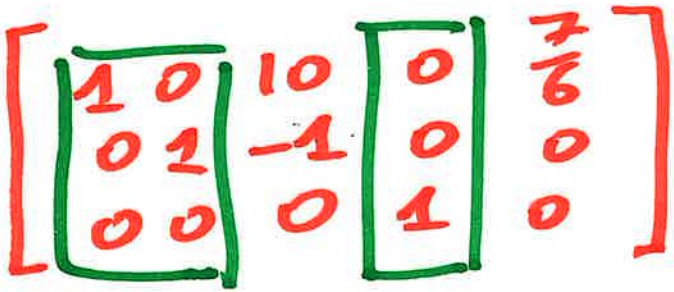
orlato abbia $\det = 0$

Eliminazione di Gauss. → = numero di righe non nulle in una riduzione di M in forma a scalini (per righe).

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 2+\frac{1}{3} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$



Studio dei Sistemi Lineari.

Def: Una equazione lineare sul campo $\mathbb{K}$ in n incognite

$$(*) \qquad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $b_i \in \mathbb{K}$ e $x_1 \dots x_n$ simboli

a_{ij} sono detti coefficienti

b_i è detto termine noto

$x_1 \dots x_n$ sono dette incognite

Una soluzione di (*) è una vettore

$(s_1 \dots s_n) \in \mathbb{K}^n$

tale che sostituendo all'incognita x_i il valore s_i si ottiene una uguaglianza.

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{in}s_n = b_n$$

Una equazione (*) è risolubile $\Leftrightarrow$ esiste almeno una sua soluzione in $\mathbb{K}^n$

$2x+4y=5$ in $\mathbb{Q}$ ha ∞ soluzioni

$$x = \frac{5}{2} - 2y$$

$$\left(\frac{5}{2} - 2y, y\right)$$

$\rightarrow$ in $\mathbb{Z}$ non ha soluzione

Def: Un sistema lineare è una coppia di m equazioni in n incognite sul campo $\mathbb{K}$ è un insieme di m equazioni lineari in n incognite su $\mathbb{K}$

Def: Sia (*) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

un sistema lineare.

Si dice soluzione di (*) ogni $(s_1 \dots s_n) \in \mathbb{K}^n$ che è soluzione di tutte le equazioni di (*) contemporaneamente.

Def: Un sistema lineare (*) è detto omogeneo se $b_1 = \dots = b_m = 0$

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

matrice incompleta del sistema

vettore dei termini noti

vettore delle incognite.

Oss 1) Tutti i dati necessari a descrivere il sistema sono contenuti nelle matrici A e B

$\rightarrow$ $(A|B)$ = matrice A cui si aggiunge la colonna B = <u>matrice completa del sistema.</u>

2) Il sistema si scrive in forma compatta come

$$\boxed{AX = B}$$

sistema lineare in forma matriciale.

Consideriamo l'applicazione lineare

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$$

cosa vuol dire che il sistema $AX = B$ è compatibile (= risolubile).

$\exists X \in \mathbb{K}^n : f_A(X) = B$

ma questo X esiste $\Leftrightarrow B \in \mathrm{Im}\, f_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $B \in \mathcal{L}(C_A)$ perché $\operatorname{Im} f_A = \mathcal{L}(C_A)$

$\Leftrightarrow$ $\dim \mathcal{L}(C_A) = \dim \mathcal{L}(C_A \cup \{B\})$

$\Leftrightarrow$ $rk(A) = rk(A|B)$.

Teorema (Rouché-Capelli): Un sistema lineare

$$AX = B$$

è compatibile (ammette soluzione) $\Leftrightarrow$

$$rk(A) = rk(A|B)$$

oss: L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $AX = B$ è sottospazio vett. di $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ $B = \underline{0}$ cioè il sistema è omogeneo.

DIM: Sia S = insieme soluzioni

Se $B = \underline{0} \Rightarrow S = \{X : AX = \underline{0}\} =$

$= \{X : f_A(X) = \underline{0}\} =$

$= \ker f_A = \ker A$

e $\ker A \leq \mathbb{K}^n$

Se $B \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{0} \notin S \Rightarrow S$ non è sottospazio $\square$

NOTAZIONE: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$; poniamo

$\ker(A) = \{X : AX = \underline{0}\} = \ker f_A$

$\rightarrow$ nullspace(A)

Quanto vale $\dim \ker(A) = \text{null}(A) = n - \text{rk}(A)$.

In generale diremo che $AX = \underline{0}$ ha $\infty^{n-\text{rk}(A)}$ sol.

Cosa succede in generale?

Sia $AX=B$ un sistema lineare non omogeneo necessariamente omogeneo ma compatibile.

Come sono fatte le soluzioni di $AX=B$?

sono tutte e sole le preimmagini di B secondo $f_A : X \to AX$

→ sono dunque elementi del tipo

$$X_0 + Z$$

$$f_A(X_0+Z) = f_A(X_0)+f_A(Z) = B+\underline{0} = B$$

con $Z \in \ker(A)$ e X_0 soluzione particolare.

$$f(\bar{X}) = B = f(X_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\bar{X}) - f(X_0) = f(\bar{X} - X_0) = B - B = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \exists Z \in Ker(A): \ \bar{X} - X_0 = Z \Rightarrow \bar{X} = X_0 + Z$$

S si può scrivere come $S = X_0 + Ker(A)$

X_0: soluzione particolare

$Ker(A)$: sott. vettoriale delle soluzioni di $AX = \underline{0}$

Teorema: Ogni soluzione di un sistema lineare compatibile $AX = B$ si scrive come

$\bar{X} = X_0 + Z$ con X_0 sol. particolare fissata e $Z \in Ker(A)$.

Oss: vi è una biiezione fra gli elementi di $\ker(A)$ e quelli di S (quando il sistema è risolvibile).

Def: Sia $AX=B$ un sistema lineare compatibile. Allora si dice che $AX=B$ ha

$$\infty^{n-k} \text{ soluzioni}$$

ove $\infty^0 := 1$, n = numero di incognite

e $k = rk(A) = rk(A|B)$

$$S = X_0 + \ker(A) = X_0 + \mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{n-k}) =$$

ove $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{n-k})$ base di $\ker(A)$

$$= \left\{ X_0 + \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_{n-k} \bar{v}_{n-k} \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

$(n-k)$ è il numero di parametri $\alpha_1 \dots \alpha_{n-k}$ da cui dipendono le soluzioni.

Es: Sia $AX=B$ un sistema lineare

Si determini la dimensione di $\mathcal{L}(S)$

ove S = insieme delle soluzioni di $AX=B$.

- $AX=B$ incompatibile $\Rightarrow S = \phi \Rightarrow \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(\phi) = \{0\}$.

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(S) = 0$

- $AX = \underline{0} \Rightarrow S = \ker(A) \Rightarrow \dim(S) = \text{null}(A)$

$= n - rk(A)$.

[N.B. Se $rk(A) = n \Rightarrow \dim(S) = 0$]

- $AX = B$ con $B \neq \underline{0}$ e $rk(A) = rk(A|B)$

$\Rightarrow S = X_0 + \ker(A)$

ed $X_0 \notin \ker(A)$ in quanto $AX_0 = B \neq \underline{0}$

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(S) = \dim \mathcal{L}(X_0, \ker(A)) =$

$= 1 + \dim \ker(A) =$

$= 1 + n - rk(A)$.

oss: Cosa succede se $AX = B$ con $A \in GL(n, \mathbb{K})$

cioè con A invertibile?

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

$\ker A = \{0\} \Rightarrow \exists!$ soluzione.

In questo caso il sistema lineare è detto di Cramer.

A quadrata & invertibile.

$\rightarrow A = (a_{11}) \rightarrow a_{11}x = b$ con $a_{11} \neq 0 \Rightarrow x = a_{11}^{-1} b$

Teorema: L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare compatibile dipende solamente dallo spazio vettoriale generato dalle sue equazioni.

→ dipende unicamente dallo sp. vettoriale delle righe di $(A|B)$.